Ann. Mus. civ. Rovereto	Sez.: Arch., St., Sc. nat.	Vol. 11 (1995)	361-366	1996

ALESSANDRO NICCOLINI

ASINTOTI OBLIQUI DI UNA CURVA ALGEBRICA AVENTE UN'EQUAZIONE DEL TIPO [y = f(x)]

Abstract - Alessandro Niccolini - Oblique asymptotes of an algebrical curve having an equation of the type [y = f(x)].

The asymptotes of the plane curves have an equation y=mx+q; if the equation of the curve is of the kind y=f(x), the coefficient m and the known term q are calculated throught two limits.

In this article they want to point out that the calculation of those two limits, in the case of algebrical curves, can be avoided solving a simple system of two equations with two unknown (quantities).

Key words: Research asymptotes.

Riassunto - Alessandro Niccolini - Asintoti obliqui di una curva algebrica avente un'equazione del tipo [y = f(x)].

Gli asintoti obliqui delle curve piane hanno l'equazione y=mx+q; se l'equazione della curva è del tipo y=f(x), il coefficiente m e il termine noto q si calcolano per mezzo di due limiti.

In questo articolo si vuole evidenziare che il calcolo di quei due limiti, nel caso di curve algebriche, può essere evitato risolvendo un semplice sistema di due equazioni con due incognite.

Parole chiave: ricerca asintoti.

Premessa

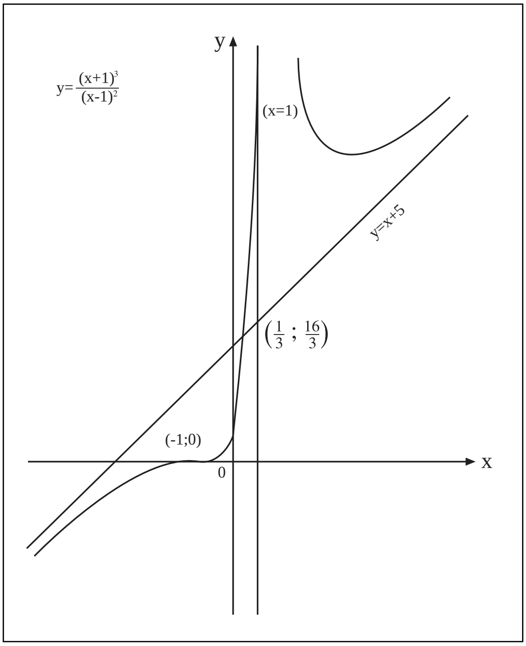
Se in un'equazione algebrica una radice tende all'infinito, nell'equazione il grado si abbassa di un'unità; per imporre che in un'equazione una soluzione tenda all'infinito, basta annullare il coefficiente del termine di grado massimo.

Se si vuole che due radici tendano all'infinito basta imporre l'annullamento del coefficiente del termine di grado massimo e del successivo.

Un asintoto di una curva algebrica piana (il cui studio possa essere affrontato da studenti delle scuole medie superiori) può essere visto come una retta avente con la curva due intersezioni riunite all'infinito.

Es. I:

$$\begin{cases} y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2} & \text{Dominio: } x \neq 1 \\ y = mx+q \end{cases}$$



$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = mx+q$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 2x + 1)(mx + q)$$
$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = mx^3 - 2mx^2 + mx + qx^2 - 2qx + q$$
$$(m-1)x^3 + (q-2m-3)x^2 + (m-2q-3)x + q-1 = 0$$

$$\begin{cases} m-1=0 \\ q-2m-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m=1 \\ q-2-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m=1 \\ q=5 \end{cases}$$

Equazione dell'asintoto obliquo: y=x+5

Risolvendo l'equazione residua si trova l'ascissa (e quindi si può trovare l'ordinata) dell'unica intersezione al finito:

$$(1-10-3)x + 4 = 0$$
$$12x = 4 \qquad x = 1/3; \quad y = 1/3 + 5 = 16/3$$

$$\begin{cases} x = 1/3 \\ y = 16/3 \end{cases}$$

Se l'asintoto è obliquo, la sua equazione è: y=mx+q. Per determinare m e q basta intersecare la curva con la retta imponendo che due intersezioni si spostino all'infinito.

A questo scopo si forma un sistema tra l'equazione della curva e l'equazione dell'asintoto; per confronto si elimina la y ottenendo un'equazione in x ed in essa si impone l'annullamento del termine di grado massimo e del successivo.

Ne risulta un sistema di due equazioni nelle due incognite m ed q, che risolto, fornisce i valori di m e di q e quindi l'equazione dell'asintoto (o degli asintoti).

Es. II

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2-6x+7} \\ y = mx+q \end{cases}$$

Dominio: $\forall \varepsilon R \quad x \leqslant 3-\sqrt{2};\ x \geqslant 3+\sqrt{2}$

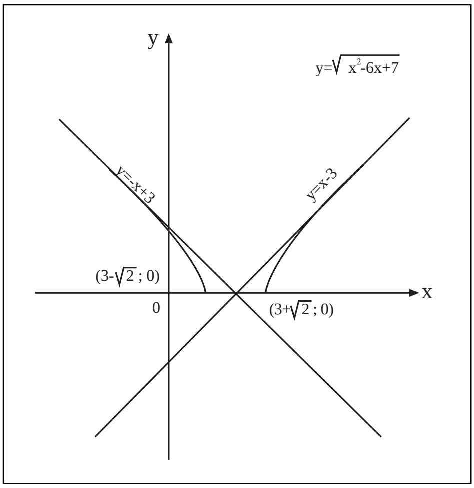
$y \geqslant 0$

$$x^2 - 6x + 7 = m^2 x^2 + 2mqx + q^2$$

$$(m^2-1)\, x^2 + (2mq + 6)x + q^2 - 7 = 0$$

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2mq + 6 = 0 \end{cases}$$

$m = \pm 1$

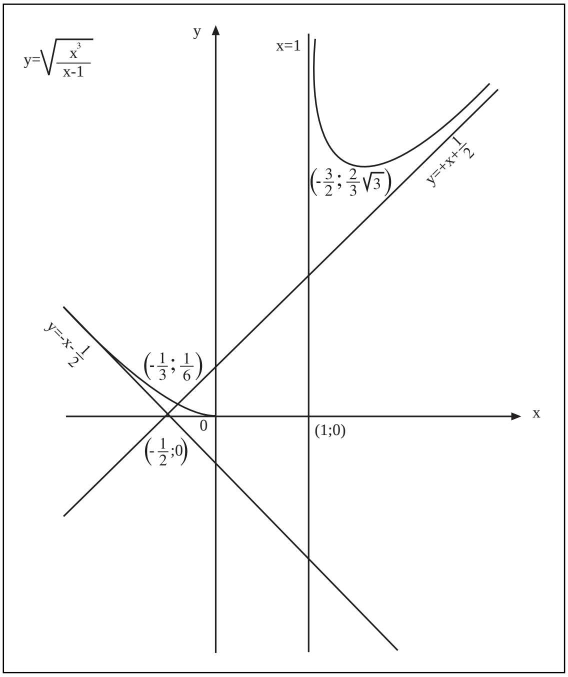


I) $\begin{cases} m=1 \\ 2q+6=0 \end{cases}$ $\begin{cases} m = 1 \\ q = -3 \end{cases}$

II) $\begin{cases} m=-1 \\ -2q + 6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m = -1 \\ q = 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 3 \\ y = -x + 3 \end{array}\right\}$$ asintoti obliqui

Es. III



$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} \\ y = mx+q \end{cases}$$

$$\frac{x^3}{x-1} = m^2x^2 + 2mqx + q^2$$

Dominio: $x \leqslant 0;\ x > 1$
$y \geqslant 0$

$$x^3 = m^2x^3 + 2mqx^2 + q^2x - m^2x^2 - 2mqx - q^2$$

$$(m^2-1)\,x^3 + (2mq-m^2)\,x^2 + (q^2-2mq)x - q^2 = 0$$

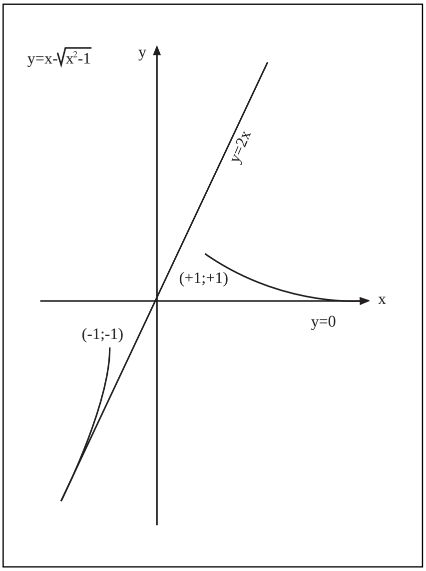
$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2mq - m^2 = 0 \end{cases} \qquad m = \pm 1 \qquad (m \neq 0)$$

I) $\begin{cases} m = 1 \\ 2q-1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m = 1 \\ q = 1/2 \end{cases}$ $y = x + 1/2$

II) $\begin{cases} m = -1 \\ -2q - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m = -1 \\ q = -1/2 \end{cases}$ $y = -x - 1/2$

$\left.\begin{matrix} y = x + 1/2 \\ y = -x - 1/2 \end{matrix}\right\}$ asintoti obliqui

Es. IV



$$\begin{cases} y = x - \sqrt{x^2 - 1} \\ y = mx+q \end{cases}$$

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = mx + q$$

$$(1-m)\,x - q = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$(1-m)^2 x^2 - 2(1-m)\,qx + q^2 = x^2 - 1$$

$$[(1-m)^2 - 1]\;\; x^2 - 2(1-m)qx + q^2 + 1 = 0$$

$$\begin{cases} (1-m)^2 = 1 \\ q(1-m) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - m = \pm 1 \\ q = 0 \end{cases}$$

I) $1 - m = -1$

$\begin{cases} m = 2 \\ q = 0 \end{cases}$ $\quad y = 2x \quad$ asintoto obliquo

II) $1 - m = +1$

$\begin{cases} m = 0 \\ q = 0 \end{cases}$ $\quad y = 0 \quad$ asintoto orizzontale

Es. V

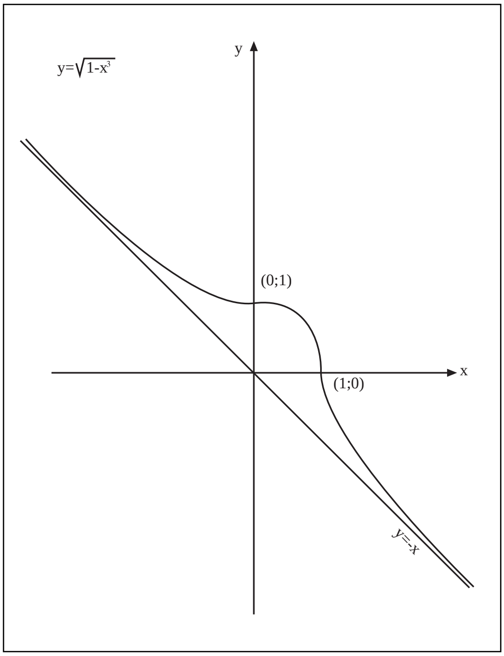
$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{1-x^3} \\ y = mx+q \end{cases}$$

$$1-x^3 = m^3x^3 + 3m^2qx^2 + 3mq^2x + q^3$$

$$(m^3+1)\,x^3 + 3m^2qx^2 + 3mq^2x + q^3 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} m = -1 \\ 3m^2q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -1 \\ q = 0 \end{cases} \qquad y = -x \qquad \text{asintoto obliquo}$$



Indirizzo dell'autore:
Alessandro Niccolini - Via Maioliche, 12/a - I-38068 Rovereto (TN)